Instituto de Matemática
Cálculo I
2018-I

Prueba 2 V1

Apellido paterno:	**Apellido materno:**	**Nombre:**

Pregunta 1	**Pregunta 2**	**Pregunta 3**	**Total**	**Nota**

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1 + \dfrac{Puntos}{10}$.

Duración = 60 minutos

---

1) [**25 ptos.**] Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 20x^2 - 44x}{8 - x^3} & \text{si } x < 2 \\ 2a & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{\sin(4 - 2x)}{\sqrt{2x} - 2} & \text{si } 2 < x \leq 5 \\ \left(\dfrac{1 - 3x}{5 - 3x}\right)^{x-2} & \text{si } 5 < x \end{cases}$$

a) (**15 ptos.**) Determine, en caso de existir, el valor de a para que f sea continua en $x = 2$.

b) (**10 ptos.**) Calcule $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x)$.

2) [**20 ptos.**] Sea $f(x) = \sin\left(\dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\right)$.

a) (**10 ptos.**) Determine, en su forma más simplificada, $f'(x)$.

b) (**10 ptos.**) Sea g una función tal que $g(4) = 0$ y $g'(4) = 1$ y sea $h(x) = f(g(x^2))$. Calcule $h'(2)$.

3) [**15 ptos.**] Sea $f(x) = (e^{2x+1} + x)\ln(e^{2x+1} + x) - 2e^{2x+1}$.

a) (**10 ptos.**) Muestre que $f'(x) = (2e^{2x+1} + 1)(\ln(e^{2x+1} + x) + 1) - 4e^{2x+1}$

b) (**5 ptos.**) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

PAUTA

1) a) Notemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3+20x^2-44x}{8-x^3}\\
&= \lim_{x\to 2^-} \frac{x(x+22)(x-2)}{(2-x)(4+2x+x^2)}\\
&= -\lim_{x\to 2^-} \frac{x(x+22)}{(4+2x+x^2)} \qquad \text{(6 pts.)}\\
&= -\frac{2\cdot 24}{12}\\
&= -4
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{\sin(4-2x)}{\sqrt{2x}-2}\\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{\sin(4-2x)}{4-2x}\cdot(4-2x)\cdot\frac{\sqrt{2x}+2}{2x-4} \qquad \text{(6 pts.)}\\
&= -(\sqrt{4}+2)\\
&= -4
\end{aligned}$$

Así, tenemos que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$. Entonces, para que f sea continua en $x = 2$ debemos tener que

$$f(2) = 2a = -4 \Leftrightarrow a = -2 \qquad \text{(3 pts.)}$$

b) Tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-3x}{5-3x}\right)^{x-2}\\
&= \lim_{x\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{5-3x}{-4}}\right)^{\frac{5-3x}{-4}}\right]^{\frac{8-4x}{5-3x}} \qquad \text{(2 + 6 + 1 + 1 pts.)}\\
&= e^{\frac{-4}{-3}}\\
&= e^{\frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

2) a) Tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right) \cdot \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - 2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2} \quad \text{(7 pts.)} \\ &= \cos\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right) \cdot \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1-e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^2} \\ &= \cos\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right) \cdot \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} \quad \text{(3 pts.)} \end{aligned}$$

b) Primero, notemos que $f'(0) = \frac{4}{2^2}\cos(0) = 1$ (2 pts.). Ahora, por la regla de la cadena, tenemos que

$$h'(x) = f'(g(x^2)) \cdot g'(x^2) \cdot 2x \quad \text{(5 pts.)}$$

Luego

$$h'(2) = f'(g(4)) \cdot g'(4) \cdot 4 = f'(0) \cdot 1 \cdot 4 = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4 \quad \text{(3 pts.)}$$

3) a) Tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2e^{2x+1}+1)\ln(e^{2x+1}+x) + (e^{2x+1}+x)\left(\frac{2e^{2x+1}+1}{e^{2x+1}+x}\right) - 4e^{2x+1} \quad \text{(7 pts.)} \\ &= (2e^{2x+1}+1)\ln(e^{2x+1}+x) + 2e^{2x+1} + 1 - 4e^{2x+1} \\ &= (2e^{2x+1}+1)(\ln(e^{2x+1}+x)+1) - 4e^{2x+1} \quad \text{(3 pts.)} \end{aligned}$$

b) Primero, notemos que

$$f(0) = (e^1)\ln(e^1) - 2e^1 = e - 2e = -e \quad \text{(1 pts.)}$$

y

$$f'(0) = (2e^1+1)(\ln(e^1)+1) - 4e^1 = (2e^1+1)2 - 4e^1 = 4e + 2 - 4e = 2 \quad \text{(2 pts.)}$$

Luego, la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(0, -e)$ es

$$y + e = 2x \quad \text{(2 pts.)}$$